

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان آمار و احتمال یازدهم از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

- ۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۵ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
 - ب) **آزمون طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۳ تا ۵ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمون‌های شما خواهد گرفت، ببینید.
- ۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۶ تا ۱۳ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
 - الف) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۶ تا ۹ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.
 - ب) **آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۱۰ تا ۱۳ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.
- ۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آنچه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.
- ۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند! در این قسمت تمام آنچه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان آمار و احتمال نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! یک راهکار، موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ و ۲ آزمون‌های ۶ تا ۹ هم استفاده کنید.



فهرست

بازمبندی درس آمار و احتمال

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۱۲	۴/۵
۲	۸ (تا آخر صفحه ۵۱)	۵/۵
۳	—	۶
۴	—	۴
جمع	۲۰	۲۰

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	۳	۱۶
اول	۴	۱۷
اول	۵	۱۸
اول	۶	۱۹
اول	۷	۲۰
دوم	۸	۲۱
دوم	۹	۲۲
دوم	۱۰	۲۳
دوم	۱۱	۲۵
دوم	۱۲	۲۶
دوم	۱۳	۲۷
دوم	۱۴	۲۸
دوم	۱۵	۲۹

۳۱

درس‌نامه توپ برای شب امتحان

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	آمار و احتمال
ردیف	آزمون شماره ۱			نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم
فصل اول				
۱	۰/۵	اصطلاحات زیر را تعریف کنید. الف) منطق نمادین ب) گزاره		
۲	۱/۲۵	در بین جملات زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را در صورت امکان تعیین کنید. الف) در این مدرسه، معلم درس آمار و احتمال کیست؟ ب) تهران پایتخت ایران است. پ) بیست و پنجمین رقم بعد از ممیز در عدد $\sqrt{2}$ برابر صفر است.		
۳	۱/۵	$(p \wedge q \Rightarrow p)$ درستی گزاره مقابل را به کمک جدول ارزش گزاره‌ها بیان کنید.		
۴	۱	هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد ارزش گزاره‌های سوری زیر را بیابید. الف) $\forall x \in A; x+1 \geq 6$ ب) $\exists x \in A; x+4 = 10$		
۵	۱	مجموعه توانی $A = \{a, \{a, b\}\}$ را با اعضا بنویسید. <i>رابطه مجموعه توانی با زیرمجموعه‌ها رو که می‌دونید؟</i>		
۶	۱/۵	فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ و $A \subseteq C$ ثابت کنید.		
۷	۱	چهار افزاز متفاوت برای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ بنویسید.		
۸	۲	اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $B \subseteq A$ ، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B) \cup B = A$.		
۹	۱/۵	مجموعه‌های $\{1\} - A$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ مفروض‌اند. الف) مجموعه B را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A^2 - (B \times A)$ را مشخص کنید و نمودار آن را در صفحه مختصات رسم کنید.		
۱۰	۰/۷۵	برای سه مجموعه A ، B و C با مرجع U ، در نمودار ون، مجموعه $A \cap (B \cup C)$ را رنگ کنید. 		
فصل دوم				
۱۱	۲	اگر $P(B) = \frac{2}{3}$ ، $P(A') = \frac{1}{5}$ و $P(A \cap B) = \frac{3}{5}$ باشد، مطلوب است: الف) $P(A \cup B)$ ب) $P(A - B)$ <i>یه جورایی هم داده شده، به $P(A)$ توجه کن!</i>		
۱۲	۱/۵	برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه S اگر $A \subseteq B$ ، ثابت کنید: $P(B - A) = P(B) - P(A)$.		
۱۳	۱/۵	اگر فضای نمونه یک آزمایش تصادفی $S = \{1, 2, 3\}$ باشد و $P(1) = a^2$ ، $P(2) = 2P(3) = a$ و مقدار a و $P(2)$ را به دست آورید.		
۱۴	۱/۵	اگر فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ باشد و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ ، آن‌گاه حاصل $P(\{b, c, d\} \{a, b, c\})$ چه قدر است؟ <i>احتمال شرطی رو خوب یاد بگیرین تمناً ارزش سوال می‌آید.</i>		
۱۵	۱/۵	در پرتاب دو تاس با هم می‌دانیم مجموع اعداد رو شده کم‌تر از ۶ است. با کدام احتمال یکی از اعداد رو شده تاس ۴ برابر تاس دیگر است؟		
۲۰	جمع نمرات		موفق باشید	

شماره	کheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	آمار و احتمال															
نمره	نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم			آزمون شماره ۱۰															
۱/۵	ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید. الف) $(x^2 + 4 = 0) \vee (x > 2)$ ب) ۷ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۷ مربع کامل باشد.			۱															
۱/۵	اگر دو عضو از مجموعه A حذف شود، تعداد زیرمجموعه‌های A، ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه توانی A چند عضو دارد؟			۲															
۱/۵	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B)' = A' \cup B$			۳															
۱	اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه ثابت کنید: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$			۴															
۱	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. اگر A پیشامد وقوع عددی کم‌تر از ۵ باشد، احتمال وقوع پیشامد A چه قدر است؟			۵															
۱/۲۵	در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد آن‌ها زن هستند. احتمال این‌که یک راننده مرد چراغ قرمز را رد کند ۰/۰۵ و زن‌ها چنین تخطی را کنند ۰/۰۱ است. راننده‌ای به‌خاطر رد کردن چراغ قرمز جریمه شده است احتمال آن را بیابید که راننده زن باشد.			۶															
۱	آزمایش‌ها نشان می‌دهد که احتمال بهبودی شخص A بعد از عمل جراحی ۸۰٪ و همین احتمال برای شخص B، ۶۰٪ است. احتمال آن‌که حداقل یکی از دو نفر بعد از عمل جراحی بهبود یابد چه قدر است؟			۷															
۱/۲۵	در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر ۲ مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟			۸															
۱	در یک نمودار دایره‌ای که نشان‌دهنده معدل‌های ۴۸ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه است زاویه مرکزی مربوط به دانش‌آموزان با معدل ۱۵، برابر ۴۵° است. تعداد آن‌ها چه قدر بوده است؟			۹															
۱/۵	میانگین موزون درصد دانش‌آموزی مطابق جدول، ۵۸ است. نمره زبان او چند درصد است؟			۱۰															
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>زبان</th> <th>معارف</th> <th>عربی</th> <th>ادبیات</th> <th>درس</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>۷۰</td> <td>۵۲</td> <td>۶۵</td> <td>درصد</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۲</td> <td>۴</td> <td>ضریب</td> </tr> </tbody> </table>			زبان	معارف	عربی	ادبیات	درس	x	۷۰	۵۲	۶۵	درصد	۲	۳	۲	۴	ضریب	
زبان	معارف	عربی	ادبیات	درس															
x	۷۰	۵۲	۶۵	درصد															
۲	۳	۲	۴	ضریب															
۱	معدل ۵ درس دانش‌آموزی ۱۷ است. چنان‌چه دو نمره ۱۷ و ۱۱ را از نمرات او حذف کنیم معدل جدید او چه قدر می‌شود؟			۱۱															
۱/۵	در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناجور ۱۰ و ۱۵ و ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را محاسبه کنید.			۱۲															
۱	واریانس داده‌های مقابل را محاسبه کنید.			۱۳															
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>۹</td> <td>۷</td> <td>۵</td> <td>۳</td> <td>۱</td> <td>مرکز دسته</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۵</td> <td>۳</td> <td>۷</td> <td>۲</td> <td>فراوانی</td> </tr> </tbody> </table>			۹	۷	۵	۳	۱	مرکز دسته	۳	۵	۳	۷	۲	فراوانی				
۹	۷	۵	۳	۱	مرکز دسته														
۳	۵	۳	۷	۲	فراوانی														
۱	جاهای خالی را با واژه مناسب تکمیل کنید. فرض کنید می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های موش‌های سرگردان شهر تهران را بررسی کنیم. هر موش سرگردان در شهر معرف است. همه موش‌های شهر تهران که کل واحدهای آماری هستند، را تشکیل می‌دهند. ۱۰۰ موش سرگردان در شهر معرف یک است.			۱۴															
۱/۵	پارامتر و آماره را تعریف کرده و با مثال مناسبی تفاوت این دو را بیان کنید.			۱۵															
۱/۵	اگر در یک نمونه تصادفی ۲۵ نفری از دانشجویان یک دانشگاه میانگین سن آن‌ها ۲۲ برآورد شود و انحراف معیار سن کل دانشجویان دانشگاه بر اساس اطلاعات قبلی ۱/۹ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین سن جامعه چه قدر است؟			۱۶															
۲۰	موفق باشید			جمع نمرات															

پاسخنامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۱- الف) منطق نمادین: دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شوند.

ب) گزاره: در منطق ریاضی، گزاره جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد هر چند ممکن است از درستی یا نادرستی آن مطلع نباشیم.

۲- الف) گزاره نیست. (جملات پرسشی گزاره نیستند.)

ب) گزاره است، ارزش آن نیز درست است.

پ) گزاره است، اما از درستی یا نادرستی ارزش آن اطلاعی نداریم.

۳- اثبات درستی: $p \wedge q \Rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

۴- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

الف) نادرست، زیرا: $1 \in A$ ، $1+1 \geq 6$ درست نیست.

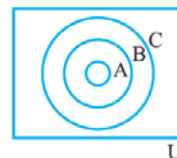
ب) $x+4=10 \Rightarrow x=10-4=6$

اما $6 \notin A$ پس ارزش آن نادرست است.

۵- مجموعه توانی یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A؛ بنابراین:

$P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{a, b\}\}$

۶- ابتدا به شکل مقابل توجه کنید:



به روش عضوگیری ثابت می‌کنیم $A \subseteq C$:

$$\forall x; x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C$$

$$\Rightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

۷- افراز یعنی تقسیم‌بندی مجموعه A به تعدادی زیرمجموعه به طوری که با هم اشتراک نداشته باشند، هیچ‌کدام تهی نباشند و اجتماع آن‌ها مجموعه A را بسازد.

$\{\}, \{2\}, \{3\}$ و $\{1, 2\}, \{3\}$ و $\{1, 3\}, \{2\}$ و $\{2, 3\}, \{1\}$ و $\{1, 2, 3\}$

۸- اولاً $A - B = A \cap B'$ پس: $(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B$

اکنون B را از سمت راست در داخل پرانتز پخش می‌کنیم:

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (B' \cup B)$$

می‌دانیم $B' \cup B$ همان مرجع است. (U)

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap U = A \cup B \xrightarrow{B \subseteq A} A \cup B = A$$

۹- الف) ابتدا اعضای مجموعه B را پیدا می‌کنیم:

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow B = \{0, 1\}$$

ب) A^2 یعنی $A \times A$ پس زوج مرتبه‌هایی با اعضای A می‌نویسیم:

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1)\}$$

برای $B \times A$ هم زوج مرتبه‌هایی می‌نویسیم که مؤلفه اول از B و مؤلفه دوم از A انتخاب

$$B \times A = \{(0, 1), (1, 1)\}$$

شوند

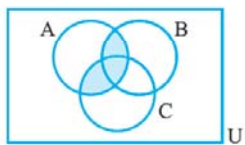
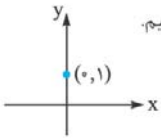
اکنون $(B \times A) - A^2$ یعنی از مجموعه $B \times A$ آن عضوهایی که در A^2 نیز قرار

دارد حذف شود. $(1, 1)$ در $B \times A$ است که در A^2 نیز قرار دارد پس باید حذف شود،

$$(B \times A) - A^2 = \{(0, 1)\}$$

در نتیجه:

رسم نمودار: زوج مرتب $(0, 1)$ را در دستگاه مختصات نشان می‌دهیم.



۱۰- $A \cap (B \cup C)$ یعنی: $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

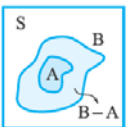
پس ناحیه رنگ‌شده به صورت روبه‌رو می‌شود:

۱۱- الف) $P(A') = \frac{1}{5}$, $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

قانون اجتماع: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{4}{5} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15}$$

ب) قانون تفاضل: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$



۱۲- طبق شکل: $B = (B - A) \cup A$

هم‌چنین A و $(B - A)$ دو پیشامد از هم جدا هستند

$$A \cap (B - A) = \emptyset$$

زیرا:

بنابراین: $P(B) = P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A) - P(A \cap (B - A))$

$$\Rightarrow P(B) = P(B - A) + P(A) - 0$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B - A) + P(A) \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

۱۳- می‌دانیم مجموع همه احتمال‌ها برابر ۱ است، پس:

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{a}{2} + a = 1$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow a = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow a = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ یا } a = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases}$$

غیرقابل قبول (طبق اصل احتمال، احتمال منفی نمی‌شود)

$$\Rightarrow P(2) = \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\{a, b, c\}) = P(\{a\}) + P(\{b, c\})$$

۱۴-

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + x \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\{b, c\}) = \frac{1}{4}$$

اکنون فرمول احتمال شرطی را به کار می‌بریم:

$$P(\{b, c, d\} \mid \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۵- زوج مرتبه‌هایی که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها کمتر از ۶ است را S می‌نامیم.

سپس احتمال موردنظر را می‌یابیم:

$$S_{\text{شرطی}} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 1), (3, 2), \\ (4, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{۱۰ حالت}$$

$$A = \{(1, 4), (4, 1)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{10}$$

در نتیجه: $P(A \cup B) = P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)) + P(A \cap B)$
 اما $A \cap B \subseteq B$ و $A \cap B \subseteq A$ در نتیجه:

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

با جای گذاری این دو رابطه خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$+ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\text{زوج}) = 2\sqrt{x} = 2x \quad -5$$

در تاس مجموع همه احتمالاتها برابر ۱ است:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

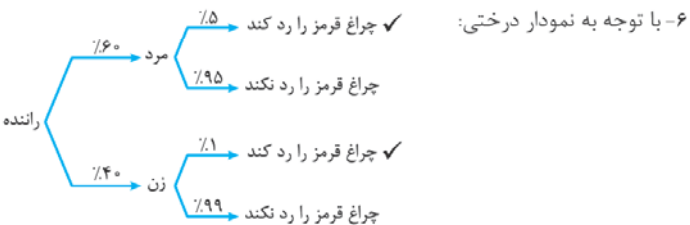
$$\Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$$

$$\Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{فرد}) = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{زوج}) = \frac{2}{9}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= x + 2x + x + 2x = 6x = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



$$P(\text{راننده چراغ قرمز را رد کند}) = \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34}{1000}$$

$$\frac{P(\text{چراغ قرمز را رد کند و زن})}{P(\text{چراغ قرمز را رد کند})} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{1}{100}}{\frac{34}{1000}} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

۷- A و B دو پیشامد مستقل از هم هستند. پس: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A) = \frac{8}{100}, \quad P(B) = \frac{6}{100}, \quad P(A \cup B) = ?$$

در نتیجه: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{100} + \frac{6}{100} - \frac{8 \times 6}{10000}$

$$= \frac{8}{100} + \frac{6}{100} - \frac{48}{10000} = \frac{14}{100} - \frac{48}{10000} = \frac{92}{1000} = 9.2\%$$

۸- ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه، ۵ مهره قرمز. دو مهره هم رنگ نباشند:

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 + 15 + 10}{45} = \frac{31}{45}$$

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow 45^\circ = \frac{f_1}{48} \times 360 \Rightarrow f_1 = \frac{48 \times 45}{360} = 6$$

$$\bar{x}_w = \frac{4 \times 65 + 2 \times 52 + 3 \times 70 + 2 \times x}{4 + 2 + 3 + 2} \quad -10$$

$$\Rightarrow 58 = \frac{260 + 104 + 210 + 2x}{11} \Rightarrow 638 = 574 + 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 64 \Rightarrow x = 32$$

یعنی درس زبان را ۳۲ درصد زده است.

$$x_1 + x_2 + x_3 + \frac{28}{5} = 17 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5(17) - 28 \quad -11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 85 - 28 = 57 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{57}{3} = 19$$

آزمون شماره ۱۰ (نوبت دوم)

۱- یک گزاره‌نمای نادرست است. $q: x^2 + 4 = 0$ درست: $p: 1 > 2$ (الف)

درست: $p \vee q$

(ترکیب فصلی دو گزاره فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.)

غلط: 7 مربع کامل است: q غلط: 7 عدد اول نیست: p (ب)

$$p \leftrightarrow q \equiv \underbrace{p \Rightarrow q}_{T} \wedge \underbrace{q \Rightarrow p}_{T}$$

اکنون ترکیب عطفی دو گزاره درست همواره درست است.

(منظور از T : «درست» می‌باشد)

۲- فرض می‌کنیم مجموعه A ، n عضو داشته باشد، پس 2^n تا زیرمجموعه دارد. طبق فرض با کم کردن ۲ عضو از n عضو مجموعه A ، 384 واحد از تعداد زیرمجموعه‌های A

$$2^n - 384 = 2^{n-2} \Rightarrow 2^n - 384 = 2^n \times \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2^n - \frac{1}{4} \times 2^n = 384$$

$$\frac{3}{4} \times 2^n = 3 \times 2^7 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

پس در ابتدا A دارای ۹ عضو بوده است و $P(A)$ دارای 2^9 عضو (۵۱۲) عضو است.

$$(A - B)' = (A \cap B)'$$

۳- اولاً: $A - B = A \cap B'$ در نتیجه:

$$(A \cap B)' = A' \cup B$$

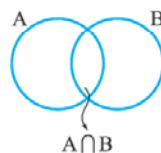
$$(A - B)' = A' \cup B$$

ثانیاً: طبق دمورگان:

در نتیجه:

$$\text{توجه داریم که } (B')' = B.$$

۴- با توجه به شکل مقابل:



$$A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \cup (A \cap B)$$

از طرفی سه مجموعه $A - (A \cap B)$ و $B - (A \cap B)$ و $A \cap B$

جدا از هم هستند.

۱۲- توجه داریم که میانگین داده‌های ناجور حذف‌شده هم 30° است. (اکثر این اتفاق می‌افتد).

$$n = 25 \quad \bar{x} = 30 \quad \sigma = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 64$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2}{25}$$

$$= \frac{(15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 + (10 - 30)^2}{25}$$

$$\Rightarrow 64 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + 400 + 225 + 225 + 400}{25}$$

$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + 1250 = 1600$$

$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 = 350$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{350}{21} = \frac{50}{3} = 16.66$$

تعداد داده‌های باقی‌مانده

۱۳- ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2 + 21 + 15 + 35 + 27}{2 + 7 + 3 + 5 + 3} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 \times 2 + (3-5)^2 \times 7 + (5-5)^2 \times 3 + (7-5)^2 \times 5}{20}$$

$$+ \frac{(9-5)^2 \times 3}{20} = \frac{32 + 28 + 0 + 20 + 48}{20} = \frac{128}{20} = 6.4$$

۱۴- یک واحد آماری - جامعه آماری - نمونه تصادفی

۱۵- پارامتر: یک مشخصه عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از کل جامعه است را پارامتر جامعه نامند.

آماره: یک مشخصه عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از یک نمونه تصادفی جامعه است را یک آماره نامند.

مثال: اگر داده‌های مربوط به همه کوهنوردان کوه دنا را داشته باشیم (کل جامعه) آن‌گاه نسبت مردان کوهنورد به کل جامعه کوهنوردان یک پارامتر است. اما اگر فقط داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم (نمونه) آن‌گاه نسبت مردان کوهنورد به کوهنوردان نمونه، یک آماره خواهد بود.

$$\bar{x}_{\text{نمونه}} = 22 \quad n = 25 \quad \sigma_{\text{جامعه}} = 1/9 \quad -16$$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 22 - \frac{2(1/9)}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 22 + \frac{2(1/9)}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow 22 - \frac{3/8}{5} \leq \mu \leq 22 + \frac{3/8}{5} \Rightarrow 22 - 0.076 \leq \mu \leq 22 + 0.076$$

$$\Rightarrow 21.924 \leq \mu \leq 22.076 \Rightarrow (21.924, 22.076)$$

درس نامه توپ برای شب امتحان



آشنایی با مبانی ریاضیات

(۱) آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی (منطق نمادین): دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شوند. در منطق ریاضی، استدلال‌ها بررسی می‌شوند تا درستی یا نادرستی آن‌ها مشخص شود.

گزاره: جمله‌ای است خبری که می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد، هر چند ممکن است از درستی یا نادرستی آن مطلع نباشیم.

تذکره: جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند زیرا خبری را به ما نمی‌رسانند. مانند: «بیشتر درس بخوان.» که جمله امری است. «چه ماشین زیبایی» که جمله عاطفی است. «شما اسمال کنکور نمی‌دهید؟» که جمله پرسشی است.

مثال: کدام یک از جملات و عبارات زیر گزاره هستند؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید. الف) کباب از ساندویچ خوشمزه‌تر است.

ب) $\sqrt{2}$ عددی گویاست.

پ) افلاطون شاگرد سقراط بود.

ت) عدد $(-2)^n$ عددی منفی است. ($n \in \mathbb{N}$)

پاسخ: الف) جمله عاطفی است پس گزاره نیست.

ب) جمله خبری با ارزش نادرست است. زیرا $\sqrt{2}$ گنگ است.

پ) جمله خبری با ارزش نامعلوم است. (چون این عبارت در کتاب درسی نیست، می‌توان آن را گزاره‌ای با ارزش نامعلوم در نظر گرفت.)

ت) جمله خبری با ارزش نادرست است، زیرا برای n های زوج، $(-2)^n$ عددی مثبت است.

تذکره: یک استدلال می‌تواند از چند جمله خبری تشکیل شود که دو جمله خبری اول را فرض‌های استدلال و جمله خبری سوم را نتیجه استدلال می‌گویند. در واقع یک استدلال می‌تواند چندین جمله خبری داشته باشد که یکی از آن‌ها نتیجه استدلال و بقیه فرض‌های استدلال هستند.

مثال: نتیجه استدلال زیر را بنویسید.

اگر هوا خیلی برفی باشد آن‌گاه مدارس ابتدایی تعطیل است، دیروز برف سنگینی بارید.

پاسخ: دیروز مدارس ابتدایی تعطیل بوده است.

جدول ارزش گزاره‌ها

معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نشان می‌دهند.

ارزش درست گزاره با نماد «د» و ارزش نادرست گزاره با نماد «ن» نشان داده می‌شود. اگر p گزاره باشد آن‌گاه ارزش آن ۲ حالت دارد:

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول زیر دارای ۴ حالت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

تذکره: اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش گزاره‌ها 2^n حالت دارد. مثلاً جدول ارزش گزاره‌های p, q, r دارای $2^3 = 8$ حالت است.

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامند.

مثلاً « x یک عدد اول است» گزاره‌نمای یک متغیره و « $3 < x - 2y$ » یک گزاره‌نمای دو متغیره است.

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و با حرف D نمایش می‌دهند.

مثال: دامنه هر یک از گزاره‌نماهای زیر را بنویسید.

الف) $x^2 + 5x - 1$ ب) $\frac{5}{x-1} = 1$ پ) $\sqrt{x-2} = 3$

پاسخ: الف) $x^2 + 5x - 1$ یک چند جمله‌ای است و دامنه چند جمله‌ای‌ها برابر \mathbb{R} می‌باشد.

ب) در کسرهای مخرج کسر، نباید صفر شود، پس:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{1\}$$

پ) در رادیکال‌های فرجه زوج، زیر رادیکال نباید منفی شود، پس:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty)$$

مجموعه جواب: در هر گزاره‌نما، به زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که به ازای اعضای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزاره با ارزش درست تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و با حرف S نمایش می‌دهند. پس همواره $S \subseteq D$.

مثال: دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۵ است. ($D = \mathbb{N}$) ب) $\frac{2x+1}{x-1} = 1$ ($D = \mathbb{R} - \{1\}$)

پاسخ: الف) مجموعه جواب، آن اعداد طبیعی است که مضرب ۵ باشند، پس:

$$S = \{5, 10, 15, \dots\}$$

ب) مجموعه جواب، x هایی است که تساوی را برقرار کنند:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow 2x-x = -1-1 \Rightarrow x = -2$$

چون -2 به مجموعه دامنه داده شده تعلق دارد پس قابل قبول است. در نتیجه: $S = \{-2\}$.

ترکیب گزاره‌ها: در کتاب درسی ترکیب گزاره‌ها با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر آن‌گاه» و «اگر آن‌گاه» و برعکس انجام می‌شود.

نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اولیه باشد. نقیض گزاره p را با نماد $\sim p$ نشان می‌دهند و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانند.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: نقیض گزاره «۲ عددی زوج است» را بنویسید.

پاسخ: «چنین نیست که ۲ عددی زوج باشد.» یا «۲ عددی زوج نیست.»

تذکره: ارزش گزاره p با ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ یکسان است در این صورت گوییم دو گزاره هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم:

مثلاً گزاره p : «۹ عددی مربع کامل است.»
گزاره $\sim p$: «۹ عددی مربع کامل نیست.»
گزاره $\sim(\sim p)$: «۹ عددی مربع کامل است.»

ترکیب شرطی: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گویند. p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامند.
جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

خلاصه جدول ارزش: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.



مثال: ارزش این گزاره را مشخص کنید. «اگر چهارضلعی ABCD یک مستطیل باشد آن‌گاه قطرهایش با هم برابر است.»

پاسخ: گزاره «چهارضلعی ABCD یک مستطیل است» همان فرض یا مقدم است که گزاره درستی است.

گزاره «قطرهای مستطیل با هم برابر است.» همان حکم یا تالی است که این هم گزاره درستی است. پس:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د

تذکره: گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. همچنین گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است.

مثال: به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
پاسخ: باید جدولی رسم کنیم که ستون‌هایش به ترتیب: p , q , $p \Rightarrow q$, $\sim q$, $\sim p$, $\sim q \Rightarrow \sim p$ باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

طبق جدول ستون‌های سوم و ششم با هم یکسان هستند، پس: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
نکته:

- هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \Rightarrow p \vee q$ » همواره درست است.
 - هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \wedge q \Rightarrow p$ » همواره درست است.
- ترکیب دوشروطی:** اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نوشته و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم و می‌خوانیم: « p اگر و تنها اگر q »

مثال: « $(3x - 5 > 1) \Leftrightarrow (x > 2)$ » یک گزاره دو شرطی است.

هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب:

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

الف) شرکت‌پذیری (جابه‌جایی پرانتزها):

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

ب) جابه‌جایی (جابه‌جایی گزاره‌ها):

پ) پخشی (پخش کردن یک گزاره بین دو گزاره):

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

ترکیب عطفی: اگر دو گزاره ساده p و q با حرف «و» به هم مربوط شوند آن را ترکیب عطفی می‌نامند و با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند.
جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

خلاصه جدول ارزش: $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند.
مثال: ارزش گزاره عطفی زیر را مشخص کنید.

« 90° مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول ۲ است.»

پاسخ: گزاره « 90° مربع کامل است» را p بنامید. چون 90° جذر کامل ندارد پس ارزش گزاره نادرست است.

گزاره «کوچک‌ترین عدد طبیعی اول، ۲ است» را q بنامید. ارزش این گزاره درست است.

p	q	$p \wedge q$
ن	د	ن

ترکیب فصلی: اگر دو گزاره ساده p و q با حرف «یا» به هم مربوط شوند آن را ترکیب فصلی می‌نامند و با نماد $p \vee q$ نشان می‌دهند.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

خلاصه جدول ارزش: $p \vee q$ فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

مثال: ارزش گزاره فصلی زیر را مشخص کنید.

«معادله $x^2 - 4 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد یا ۲۵ مضرب ۵ است.»

پاسخ: گزاره « $x^2 - 4 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد» را p بنامید.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

پس ارزش گزاره درست است.

گزاره «۲۵ مضرب ۵ است.» را q بنامید.

پس ارزش گزاره q نیز درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د

مثال: جدول ارزش گزاره $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را تشکیل دهید.

پاسخ: دو گزاره p و q را در نظر می‌گیریم. گفتیم که جدول ارزش آن‌ها $2^2 = 4$ حالت دارد. دو ستون رسم کرده و این ۴ حالت را مشخص می‌کنیم. سپس گزاره‌های

$\sim p$, $\sim q$, ترکیب عطفی $(p \wedge \sim q)$ و ترکیب فصلی $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$ را در ستون‌های بعد جای‌گذاری می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د

سور: سورها علامتهایی هستند که قبل از گزاره‌ها قرار می‌گیرند و متغیرهای گزاره‌ها را به یک مجموعه معین محدود می‌کنند و بدین ترتیب گزاره‌ها را به یک گزاره تبدیل می‌کنند که این گزاره می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد.

انواع سور: عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» را سور عمومی نامند و با نماد « \forall » نشان می‌دهند. همچنین عبارت‌های «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» را سور وجودی نامند و با نماد « \exists » نشان می‌دهند.

گزاره‌های با سور عمومی:

گزاره‌های زیر داده شده‌اند:

- هر عدد طبیعی، مثبت است.
- هر مستطیل، متوازی‌الاضلاع است.
- هر عدد اول، فرد است.

در هر یک از این گزاره‌ها، در واقع خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت داده‌ایم. چنین گزاره‌هایی را گزاره‌های با سور عمومی می‌نامند.

«هر x ای خاصیت p را دارد.» « $\forall x : p(x)$ »

توجه شود که گزاره‌هایی با سور عمومی وقتی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیرشان یکسان باشد.

مثلاً گزاره «هر عدد اول، فرد است» نادرست است زیرا عدد ۲، اول است در حالی که زوج است نه فرد.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$ ب) $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 < 0$ پ) $\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x}{4} < x$

پاسخ: الف) درست؛ زیرا همواره x^2 عددی مثبت یا صفر است.

ب) نادرست؛ زیرا توان دوم هیچ عددی منفی نیست.

پ) نادرست؛ زیرا برای اعداد صحیح منفی برقرار نیست.

مثلاً اگر $x = -2$ باشد آن‌گاه $-\frac{2}{4} < -2$ نادرست است.

گزاره‌هایی با سور وجودی:

گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت می‌دهند.

«حداقل یک x هست که خاصیت p را دارد.» « $\exists x : p(x)$ » توجه کنید که گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها ناتهی باشد.

مثلاً گزاره « $\exists x \in \mathbb{Z}; x^2 = x$ » یک گزاره درست است زیرا برای اعداد صحیح $x = 0, 1$ تساوی $x^2 = x$ برقرار است.

اما گزاره « $\exists x \in \mathbb{N}; \sqrt{x} > x$ » یک گزاره نادرست است؛ زیرا هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که در رابطه $\sqrt{x} > x$ صدق کند.

نقیض گزاره‌های سور:

الف) نقیض گزاره‌های با سور عمومی:

ب) نقیض گزاره‌های با سور وجودی:

مثال: الف) نقیض گزاره «هر انسانی کوشا است» را بنویسید.

پاسخ: بعضی انسان‌ها کوشا نیستند.

ب) نقیض گزاره «بعضی از اعداد اول زوج‌اند» را بنویسید.

پاسخ: هر عدد اولی فرد است.

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کرده و نقیض آن‌ها را بنویسید.

الف) $p: \exists x \in \mathbb{N}; 3 < x < 5$

ب) $q: \exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

پ) $p: \forall x \in \mathbb{N}; x + 1 \geq 2$

پاسخ: الف) گزاره p به ازای $x = 4$ درست است.

ب) $\sim p: \forall x \in \mathbb{N}; x \leq 3, x \geq 5$

پ) $\sim q: \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$ درست است زیرا $y = -1$ جواب است.

ب) $\sim p: \exists x \in \mathbb{N}; x + 1 < 2$ (همواره درست)

۲) مفاهیم اولیه

مفهوم مجموعه: دسته یا گروهی از اشیای کاملاً مشخص را مجموعه گویند.

عضو: هر عدد یا شیء داخل مجموعه را عضو می‌نامند. $x \in A$ ، یعنی x متعلق به مجموعه A است.

تهی: مجموعه‌ای که عضو ندارد و با \emptyset یا $\{\}$ نمایش داده می‌شود.

مرجع: مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مسئله زیرمجموعه آن باشند و با M یا U نشان می‌دهیم.

زیرمجموعه: مجموعه B زیرمجموعه A است هرگاه تمام اعضای B در A باشند.

$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A$

$(\exists x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B$

زیرمجموعه سره: اگر $B \subseteq A$ ولی $B \neq A$ آن‌گاه B زیرمجموعه سره A نامیده می‌شود.

مجموعه توانی: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A ، مجموعه توانی A نامیده می‌شود و با $P(A)$ نمایش داده می‌شود.

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{1\}\}$ باشد، مجموعه $P(A)$ را بنویسید.

پاسخ: تمام زیر مجموعه‌های A را نوشته و در یک مجموعه قرار می‌دهیم:

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$

مثال: اگر $A = \{\emptyset, \{1\}, \{1, \{1\}\}$ ، کدام عبارت درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $\{1\} \subseteq A$ ب) $\{\{1\}\} \in A$

پاسخ: برای عضویت (\in)، عضو داده‌شده باید عیناً در مجموعه دیده شود و برای زیرمجموعه بودن (\subseteq)، داخل مجموعه داده‌شده باید عیناً در مجموعه دوم دیده شود. الف) درست، زیرا $1 \in A$ است.

ب) نادرست، زیرا A چنین عضوی ندارد.

نکته: اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، آن‌گاه:

- تعداد کل زیرمجموعه‌های $A: 2^n$
- تعداد زیرمجموعه‌های سره $A: 2^n - 1$
- تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی $A: 2^n - 2$
- تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی $A: \binom{n}{k}$

مثال: یک مجموعه n عضوی دارای ۳۵ زیرمجموعه ۳ عضوی است. مطلوب است:

الف) n ب) تعداد زیرمجموعه‌ها

پ) تعداد زیرمجموعه‌های سره ت) تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی

پاسخ: الف) $\binom{n}{3} = 35 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} = 35$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 6 \times 7 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$

ب) تعداد کل زیر مجموعه‌ها: $2^7 = 128$

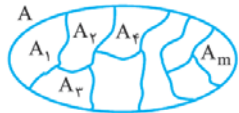
پ) تعداد زیرمجموعه‌های سره: $2^7 - 1 = 127$

ت) تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی: $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

افراز یک مجموعه

تعریف: فرض می‌کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد. گوئیم m به زیرمجموعه

A_1, A_2, \dots, A_m افراز شده است، هرگاه:



۱) تمام A_i ها ناتهی باشند.

۲) اشتراک دوتا، دوتای آن‌ها تهی باشد.

۳) اجتماع تمام A_i ها مجموعه A را بسازد.

مثال: تمام افرازهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید.

پاسخ: افراز ۱: $A_1 = \{a\}$

افراز ۲: $A_1 = \{a, b\}$

افراز ۳: $A_1 = \{a, c\}$

افراز ۴: $A_1 = \{b, c\}$

افراز ۵: $A = A_1 = \{a, b, c\}$